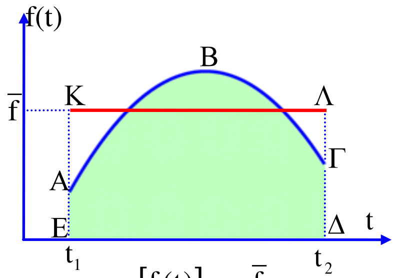
Ενεργός ένταση – ενεργός ταχύτητα: … Ίδιος μαθηματικός ορισμός …

Α. Η έννοια της μέσης τιμής

Έστω μια συνάρτηση f(t) ορισμένη στο διάστημα $[t_1,t_2]$ και της οποίας η γραφική παράσταση αποδίδεται στο διάγραμμα από την καμπύλη ΑΒΓ.

Έστω επίσης μια άλλη σταθερή συνάρτηση με τιμή $\bar{f}$ ορισμένη επίσης στο διάστημα $[t_1,t_2]$ και της οποίας η γραφική παράσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

Αν τώρα το εμβαδόν ΑΒΓΔΕ της f(t) με τον άξονα των χρόνων t είναι **ίσο** με το εμβαδόν ΚΛΔΕ της $\bar{f}$ με τον άξονα των χρόνων t , τότε η $\bar{f}$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f(t) στο διάστημα $[t_1,t_2]$ και συμβολίζεται εκτός από το $\bar{\mathbf{f}}$ με το $\mathbf{f_{av}}$ από το αγγλικό **average**.



$[f(t)]_{av} = \bar{f}$

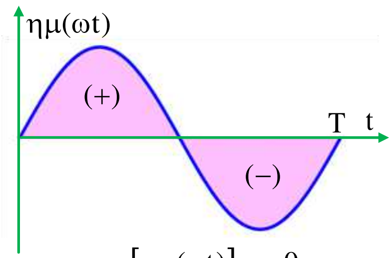
Επίσης αν έχουμε τις συναρτήσεις h(t)=f(t)+C και g(t)=Cf(t), όπου C μια σταθερή ποσότητα τότε $\bar{h}=\bar{f}+C$ και $\bar{g}=C\bar{f}$ που γράφονται – συμβολίζονται και ως $h_{av}=f_{av}+C$ και $g_{av}=Cf_{av}$.

Β. Μέσες τιμές αρμονικών συναρτήσεων

Η μέση τιμή κάθε αρμονικής συνάρτησης $f(t)=C\cdot ημ(ωt)$ ή $f(t)=C\cdot συν(ωt)$ για μία περίοδο ή ακέραιο αριθμό περιόδων είναι μηδέν γιατί το αντίστοιχο εμβαδόν της f(t) και του άξονα των χρόνων είναι μηδέν, δηλαδή…

$$f(t)_{av}=[C\cdot ημ(ωt)]_{av}=C\cdot[ημ(ωt)]_{av}=C\cdot 0=0$$

$$f(t)_{av}=[C\cdot συν(ωt)]_{av}=0$$



$$[ημ(ωt)]_{av}=0$$

$$[C\cdot ημ(ωt)]_{av}=0$$

Επίσης μηδενικές είναι οι μέσες τιμές των παρακάτω αρμονικών συναρτήσεων

$$h(t)_{av}=[C\cdot ημ(κωt)]_{av}=C\cdot[ημ(κωt)]_{av}=C\cdot 0=0$$

$$y(t)_{av}=[C\cdot συν(κωt)]_{av}=C\cdot[συν(κωt)]_{av}=C\cdot 0=0$$

Β-1: Μέση τιμή της g(t)= Cημ²(ωt) για μια περίοδο.

Από τη σχέση συν(2ωt)=1-2ημ^2(ωt) παίρνουμε $ημ^2(ωt)=\dfrac{1-συν(2ωt)}{2}$, οπότε η συνάρτηση $g(t)=C\cdot ημ^2(ωt)$ γράφεται $g(t)=C\cdot\dfrac{1-συν(2ωt)}{2}$ ή $g(t)=\dfrac{C}{2}-\dfrac{C}{2}\cdot συν(2ωt)$, οπότε η μέση τιμή αυτής είναι $\bar{g}=\left[\dfrac{C}{2}-\dfrac{C}{2}\cdot συν(2ωt)\right]_{av}$ ή $\bar{g}=\dfrac{C}{2}-\left[\dfrac{C}{2}\cdot συν(2ωt)\right]_{av}$ ή $\bar{g}=\dfrac{C}{2}-\dfrac{C}{2}\cdot[συν(2ωt)]_{av}$ ή

$$\bar{g}=\frac{C}{2}-\frac{C}{2}\cdot 0 \text{ ή } \mathbf{g_{av}=\frac{C}{2}}$$

Γ. Ενεργός ένταση ρεύματος στο αρμονικά εναλλασσόμενο ρεύμα.

Έστω ένα αρμονικά εναλλασσόμενο ρεύμα με χρονική εξίσωση $i=I_0\eta\mu(\omega t)$.

- Η μέση τιμή των στιγμιαίων τιμών της έντασης ρεύματος για μια περίοδο είναι μηδέν…
  $\bar{i}=[I_0\eta\mu(\omega t)]_{av}=I_0[\eta\mu(\omega t)]_{av}=I_0\cdot 0$ ή $\mathbf{\bar{i}=0}$

Η συνάρτηση του τετραγώνου των στιγμιαίων τιμών των εντάσεων ρεύματος είναι,

$$i^2=I_0^2\eta\mu^2(\omega t) \text{ ή } i^2=I_0^2\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2} \text{ ή } i^2=\frac{I_0^2}{2}-\frac{I_0^2}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t).$$

- Η μέση τιμή των τετραγώνων των στιγμιαίων τιμών της έντασης ρεύματος για μια περίοδο ή ακέραιο αριθμό περιόδων είναι,

$$\overline{i^2}=\left[\frac{I_0^2}{2}-\frac{I_0^2}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t)\right]_{av} \text{ ή } \overline{i^2}=\frac{I_0^2}{2}-\frac{I_0^2}{2}[\sigma\upsilon\nu(2\omega t)]_{av} \text{ ή } \overline{i^2}=\frac{I_0^2}{2}-\frac{I_0^2}{2}\cdot 0 \text{ ή } \mathbf{\overline{i^2}=\frac{I_0^2}{2}} \quad (1)$$

- **Η ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των στιγμιαίων τιμών της έντασης ρεύματος** ονομάζεται **ενεργός ένταση** και συμβολίζεται με $\mathbf{I_{rms}}$ (room mean square) ή I_r ή $I_{\varepsilon\nu}$ και έχει τιμή $I_{\varepsilon\nu}=\sqrt{\left(\overline{i^2}\right)} \xrightarrow{(1)} I_{\varepsilon\nu}=\sqrt{\frac{I_0^2}{2}}$ ή $\mathbf{I_{\varepsilon\nu}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}}$.

- Με την ίδια λογική ορίζεται και η **ενεργός τάση** ως **η ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των στιγμιαίων τιμών της τάσης** και με ανάλογη επεξεργασία βρίσκουμε $\mathbf{V_{\varepsilon\nu}=\frac{V_0}{\sqrt{2}}}$.

Δ. Στιγμιαία και μέση ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος σε αντιστάτη.

Μια αρμονικά εναλλασσόμενη τάση $v=V_0\eta\mu(\omega t)$ τροφοδοτεί έναν αντιστάτη με στιγμιαία ένταση ρεύματος να έχει ανάλογη χρονική εξίσωση $i=I_0\eta\mu(\omega t)$.

Η στιγμιαία ισχύς με την οποία ο αντιστάτης παίρνει ενέργεια είναι $P=vi$ ή

$$P=V_0\eta\mu(\omega t)\cdot I_0\eta\mu(\omega t) \text{ ή } P=V_0I_0\eta\mu^2(\omega t) \text{ ή } P=V_0I_0\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2} \text{ ή } P=\frac{V_0I_0}{2}-\frac{V_0I_0}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t).$$

Η **μέση τιμή της ισχύος** (για **μια περίοδο** ή ακέραιο αριθμό περιόδων) που ο αντιστάτης παίρνει ενέργεια είναι $\bar{P}=\left[\frac{V_0I_0}{2}-\frac{V_0I_0}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t)\right]_{av}$ ή $\bar{P}=\frac{V_0I_0}{2}-\frac{V_0I_0}{2}[\sigma\upsilon\nu(2\omega t)]_{av}$ ή

$$\bar{P}=\frac{V_0I_0}{2}-\frac{V_0I_0}{2}\cdot 0 \text{ ή } \mathbf{\bar{P}=\frac{V_0I_0}{2}} \text{ ή } \bar{P}=\frac{V_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}} \text{ ή } \mathbf{\bar{P}=V_{\varepsilon\nu}I_{\varepsilon\nu}} \xrightarrow{V_{\varepsilon\nu}=I_{\varepsilon\nu}R} \mathbf{\bar{P}=I_{\varepsilon\nu}^2R} \quad (2)$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό και την μαθηματική διαδικασία υπολογισμού της ενεργού έντασης ρεύματος, ενεργού τάσης και μέσης ισχύος αυτές ορίζονται (και με μαθηματική αυστηρότητα έχουν νόημα) για μια περίοδο ή ακέραιο αριθμό περιόδων του ρεύματος.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ο υπολογισμός της ηλεκτρικής ενέργειας που παίρνει ο αντιστάτης και η οποία θα δίδεται από την σχέση $\mathbf{W_{\eta\lambda}=\bar{P}t}$ (3) αλλά για **t=T** ή $\mathbf{t=kT}$ με $k\in\mathbb{Z}^+$.

Πρακτικά όμως στα υπάρχοντα εναλλασσόμενα ρεύματα έχουμε f=50Hz ή T=0,02s οπότε πρακτικά κάθε χρονικό διάστημα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου οπότε η ανωτέρω σχέση (3) ισχύει για κάθε χρονικό διάστημα και μπορεί να γραφεί $W_{\eta\lambda}=\bar{P}t \xrightarrow{(2)}$

$W_{ηλ} = I_{εν}^2 Rt$. Η ενέργεια αυτή γίνεται θερμική στον αντιστάτη και εκλύεται ως θερμότητα από αυτόν (φαινόμενο Joule) $\mathbf{Q = I_{εν}^2 Rt}$.

Από την σχέση αυτή **παρατηρούμε** και **συμπεραίνουμε** ότι η σχέση για την θερμότητα Joule που εκλύεται σε ένα αντιστάτη όταν διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, **είναι ίδια** με της σχέση που δίνει την θερμότητα Joule που εκλύεται **από συνεχές ρεύμα σταθερής τιμής και ίσης με την ενεργό ένταση** αν διαρρέει τον ίδιο αντιστάτη στον ίδιο χρόνο.

Σχόλιο: Εδώ παρατηρούμε ότι αυτό το απλό **τελικό συμπέρασμα** αποτελεί τουλάχιστον στη σχολική βιβλιογραφία[1] την βάση και αρχή ορισμού της ενεργού έντασης …

Ε. Υπολογισμός ενεργού έντασης σε σύνολο ρευμάτων.

Ένας αντιστάτης R διαρρέεται ταυτόχρονα από δύο ρεύματα ένα συνεχές I_1=1A και ένα εναλλασσόμενο με ένταση $i_2=4ημ(100πt)$ (S.I) . Ζητείται η ενεργός ένταση του σύνθετου ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη.

Απάντηση:

Η στιγμιαία ένταση του συνολικού ρεύματος είναι $i=1+4ημ(100πt)$ και το τετράγωνο των στιγμιαίων τιμών είναι $i^2=\left(1+4ημ(100πt)\right)^2$ ή $i^2=1+16ημ^2(100πt)+8ημ(100πt)$ ή

$i^2=1+16\dfrac{1-συν(2100πt)}{2}+8ημ(100πt)$ ή $i^2=1+8-8συν(200πt)+8ημ(100πt)$ ή

$i^2=9-8συν(200πt)+8ημ(100πt)$.

Η μέση τιμή των τετραγώνων των στιγμιαίων τιμών της έντασης ρεύματος για μια περίοδο ή ακέραιο αριθμό περιόδων είναι, $\overline{i^2}=\left[9-8συν(200πt)+8ημ(100πt)\right]_{av}$ ή

$\overline{i^2}=9-8\left[συν(200πt)\right]_{av}+8\left[ημ(100πt)\right]_{av}$ ή $\overline{i^2}=9-8\cdot 0+8\cdot 0$ ή $\overline{i^2}=9$ (S.I)

Η ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των στιγμιαίων τιμών της έντασης ρεύματος είναι η ενεργός ένταση $I_{εν}=\sqrt{\left(\overline{i^2}\right)}=3A$.

Δοκιμάστε λύση στο ανωτέρω θέμα με βάση τον ορισμό που δίνεται στο σχολικό βιβλίο.

Επειδή στη υπάρχουσα σχολική βιβλιογραφία το συμπέρασμα για την ενεργό ένταση ρεύματος γίνεται ορισμός … ας μην μπλέξουμε τους μαθητές με τους ανωτέρω ορισμούς …ας τους βρουν αργότερα και ας βγάλουν τα όποια συμπεράσματα. Τώρα αν μας ρωτήσεις κάποιος τι σχέση μπορεί να έχει η ενεργός ένταση ρεύματος με την ενεργό ταχύτητα των μορίων …αν μην βιαστούμε να του απαντήσουμε καμία..

[1] με εξαίρεση το σχολικό βιβλίο «Φυσική Β΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης» των Ανδρακάκου, Βελέντζα, Γάτσιου, Διαμαντή, Δρύ ή Δρή, Κρίκου, Πιερράκου … που ήταν ένα από λεγόμενο πακέτο «πολλαπλό βιβλίο» … και μόνο για μια χρονιά … .

Στ. Ενεργός ταχύτητα και ενεργός ένταση ρεύματος .

Η ενεργός ταχύτητα των μορίων από την κινητική θεωρία των αερίων ορίζεται ως ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου $\upsilon_{\varepsilon\nu}=\sqrt{\left(\overline{\upsilon^{2}}\right)}$ … προφανώς στην ίδια μαθηματική λογική με την ενεργό ένταση και ρεύματος.